

Принцип пошагового нахождения приближенных решений

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y) \quad (10)$$

Основная задача, связанная с этим уравнением, известна как *задача Коши*: найти решение уравнения (10) в виде функции $y(x)$, удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \quad (11)$$

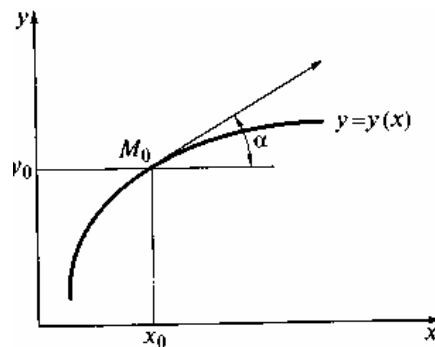


Рис.6

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через

156

заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, при выполнении равенства (11) (см. рис.6). С численной точки зрения задача Коши выглядит следующим образом: требуется построить таблицу значений функции $y=y(x)$, удовлетворяющей уравнению (10) и начальному условию (11) на отрезке $[a; b]$ с некоторым шагом h . Обычно считается, что $x_0 = a$, т.е. начальное условие задано в левом конце отрезка.

Простейшим из численных методов решения дифференциальных уравнений является *метод Эйлера*. В основе метода Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот

метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (10) с начальным условием (11) (т.е. поставлена задача Коши). Решим вначале следующую задачу: найти простейшим способом приближенное значение решения в некоторой точке $x_1 = x_0 + h$, где h - достаточно малый шаг.

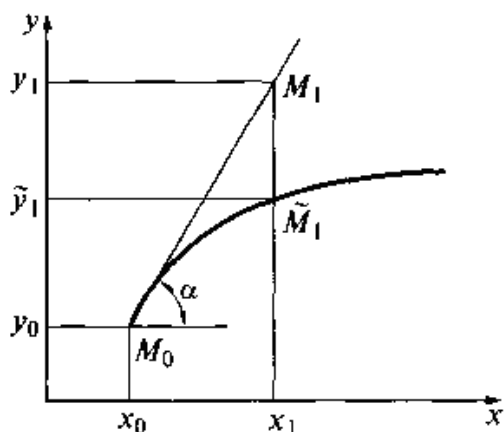


Рис. 7

Заметим, что уравнение (10) совместно с начальным условием (11) задают направление касательной к искомой интегральной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (12)$$

Двигаясь вдоль этой касательной (рис. 7), учитывая соотношения (10) и (12), получим приближенное значение решения в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) \quad (13)$$

Располагая приближенным решением в точке $M_1(x_1, y_1)$, можно повторить описанную ранее процедуру: построить прямую, проходящую через эту точку с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ и по ней найти приближенное значение решения в точке $x_2 = x_1 + h$. Заметим, что в отличие от ситуации, изображенной на рис. 7, эта прямая не есть касательная к реальной интегральной кривой, поскольку точка M_1 , нам недоступна. Однако представляется интуитивно

ясным, что если h достаточно мало, то получаемые приближения будут близки к точным значениям решения.

Продолжая эту идею, построим систему равноотстоящих точек

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

Получение таблицы значений искомой функции $y(x)$ по методу Эйлера заключается в циклическом

157

применении формулы

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + hf(x_i; y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

Геометрическая иллюстрация метода Эйлера приведена на рис. 8. Вместо интегральной кривой в реальности получается совокупность прямых (так называемая *ломаная Эйлера*).

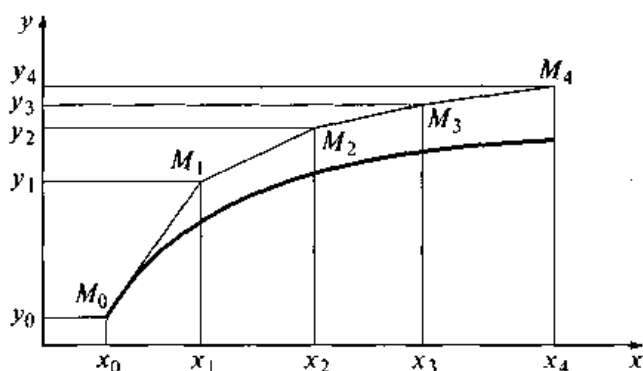


Рис.8 Ломаная Эйлера

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решение получается от одного узла к другому, называются *пошаговыми*. Метод Эйлера — простейший представитель семейства пошаговых методов.

Отметим, что оценка погрешности метода при таком элементарном рассмотрении невозможна даже на первом шаге. Кроме того, особенностью любого пошагового метода является то, что, начиная со второго шага исходное

значение y , в формуле (13) само является приближенным, т.е. погрешность на каждом следующем шаге систематически возрастает.

Наиболее используемым эмпирическим методом оценки точности как метода Эйлера, так и других пошаговых методов приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является способ двойного прохождения заданного отрезка — с шагом h и с шагом $h/2$. Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает эмпирическое основание считать их верными (хотя полной уверенности в этом быть не может).

Одна из принципиальных трудностей всех пошаговых методов численного решения дифференциальных уравнений состоит в возможности столкнуться с *неустойчивостью* метода. Оценка погрешности неявно предполагает, что ломаная приближенного решения (см. рис. 8) хотя и не совпадает с интегральной кривой, но качественно на нее похожа. Чаще всего это именно так, но иногда (например, при неудачном выборе шага h) приближенное решение может быть качественно непохожим на точное (например, точное монотонно убывает, а приближенное монотонно возрастает).

Для эмпирического контроля того, не имеет ли места неустойчивость, следует численно интегрировать уравнение с несколькими, значительно отличающимися, значениями шага h , сравнивая качественно поведение решений.

158

Пример 4. Применяя метод Эйлера, составить таблицу значений решения дифференциального уравнения $y' = y - x$, с начальным условием $y(0) = 1,5$ на отрезке $[0; 1,5]$, приняв $h = 0,25$. Вычисления проводить с 4-мя знаками после запятой.

Решение:

Для удобства вычислений составим таблицу.

1-й шаг: по начальным условиям заполним первую строку во 2-м и 3-м столбцах ;

2-й шаг: из уравнения $y_i' = y_i - x_i$ вычисляем y_i' ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) в столбце (4);

3-й шаг: содержимое столбца (4) умножаем на h (вычисляем $\Delta y_i = h y_i'$, $i = 0, 1, \dots, 5$) и

записываем результат в столбец (5) этой же строки;

4-й шаг: к содержимому столбца (3) прибавляем содержимое столбца (5) этой же строки

(вычисляем $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) и результат записываем в столбец (3) следующей

строки. Определяем $x_{i+1} = x_i + h$ и затем шаги 2-4 повторяем до тех пор, пока не будет пройден

весь отрезок $[0; 1,5]$.

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = h y_i'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4951
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552

5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4072		

Пример 5. Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = \cos y + 3x$ с начальным значением $y(0) = 1,3$ на отрезке $[0; 1]$, приняв шаг $h = 0,2$.

Решение: результаты вычислений с двумя знаками после запятой приведены в таблице:

i	x_i	y_i	$y' = \cos y_i + 3x_i$	$\Delta y_i = 0,2y'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0,0	1,3	0,27	0,05
1	0,2	1,35	0,82	0,16
2	0,4	1,51	1,25	0,25
3	0,6	1,76	1,61	0,32
4	0,8	2,08	1,91	0,38
5	1,0	2,46		